VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КВАЗИСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ*

В.П. ИЛЬИН, М.В. ПАВЛОВ, В.М. СВЕШНИКОВ

Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СОРАН, Новосибирск, Россия

email: ilin@comcen.nsk.su

Рассматриваются методы решения двумерных краевых задач на сетках, составленных из различного типа сеточных подобластей (четырехугольных, треугольных, полярных или специальных) с целью адаптивного учета особенностей искомого решения и геометрии границы расчетной области. В каждой подобласти сетка является соответствующим образом структурированной, но согласованной со смежными подобластями на их общих границах. Сеточные аппроксимации на треугольных и четырехугольных элементах, в том числе криволинейных, строятся методом конечных объемов на основе поэлементной технологии и сборки глобальной матрицы баланса задачи. Решение алгебраической системы проводится методом неполной факторизации с ускорением сопряженными градиентами на основе разреженных строчных форматов алгебраической структуры данных.

1. Введение

Вопросы построения адаптивных сеток для решения многомерных краевых задач со сложной геометрией расчетной области рассматривались многими авторами и имеют свою обширную литературу, см. например, обзор в [1].

В значительной степени проблемы решения дифференциальных уравнений на получаемых неструктурированных сетках продвинуты в методах конечных элементов благодаря поэлементной технологии вычисления локальных матриц жесткости и сборки глобальной матрицы системы на основе специальных форматов алгебраической структуры данных, см. [2], [3].

В последние годы аналогичная поэлементная технология построения сеточных уравнений развита в методах конечных объемов на основе определения локальных потоков и формирования локальных матриц баланса [4]. В работах [5], [6] предложены алгоритмы построения квазиструктурированных сеток, состоящих из сеточных подобластей различных типов: четырехугольных, треугольных, полярных и некоторых специальных,– конструируемых адаптивным образом с учетом особенностей искомого решения и геометрии расчетной области. В каждой из подобластей рассматриваются структурированные сетки, т.е. сетки, образованные семействами упорядоченных сеточных линий, формирующие однородные сеточные шаблоны и обеспечивающие простую нумерацию узлов. Смежные сеточные подобласти предполагаются согласованными, т.е. имеющими совпадающие узлы на общих внутренних границах. В данной работе предлагаются конечно-объемные алгоритмы построения локальных матриц баланса для эллиптического уравнения на четырехугольных и треугольных сеточных элементах, в том числе криволинейных, удовлетворяющих обобщенному условию Делоне. Полная погрешность аппроксимации интегральных консервативных соотношений складывается из ошибок приближения нормальных производных, поверхностных и объемных интегралов, причем аппроксимация смешанных краевых условий на внешних и внутренних границах раздела сред с различными материальны-ми свойствами осуществляется практически без привнесения дополнительных ошибок.

---

*Работа поддержана грантами РФФИ № 99-01-00579 и № 99-07-90422

© В.П. Ильин, М.В. Павлов, В.М. Свешников, 2001.

Глобальная матрица алгебраической системы сеточных уравнений ассемблируется на основе разреженного строчного формата данных. Итерационное решение получаемых стилтьесовых линейных уравнений реализуется с помощью экономичного явного метода неполной факторизации (в модификации Айзенштадта) с ускорением сопряженными градиентами EXIFA, см. [7].

Рассматриваемые вычислительные алгоритмы и технологии иллюстрируются на примере двумерной краевой задачи

$$-\frac{1}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}x^\alpha\sigma\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{y}\sigma\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega, \qquad (1)$$

в ограниченной области Ω с границей Γ, на различных частях которой задаются краевые условия Дирихле, Неймана или Ньютона:

$$u|_{\Gamma_d}=g(x,y), \qquad (\beta u+\frac{\partial u}{\partial n})|_{\Gamma_n}=\gamma, \qquad \Gamma=\Gamma_d\cup\Gamma_n. \qquad (2)$$

В уравнениях (1), (2) α=0, 1 соответствует декартовой и цилиндрической системам координат, $\sigma>0$ – кусочно-гладкая функция, а $\frac{\partial}{\partial n}$ означает производную по направлению внешней нормали к границе области. Предполагается, что все исходные данные обеспечивают необходимую для дальнейшего гладкость искомого решения.

В п.2 мы описываем особенности рассматриваемых сеток и принципы построения сеточных структур данных на макро- и микроуровне. В п. 3 излагаются алгоритмы вычисления элементов локальных и глобальных матриц баланса. В п. 4 приводятся результаты численных экспериментов по расчету характерной конфигурации электронной пушки [8].

2. Построение квазиструктурированных сеток

Предполагая, что граница Γ расчетной области Ω состоит из конечного числа отрезков гладких кривых, построим сеточную область Ω^h с границей $\Gamma^h=\Gamma$, составленную из подобластей Ω_l^h. В качестве Ω_l^h рассматриваются подобласти, топологически подобные треугольным и четырехугольным подобластям. В каждой из таких подобластей рассматривается структурированная сетка, т.е. сетка, образованная семействами упорядоченных сеточных линий, формирующих однородные сеточные шаблоны и обеспечивающих простую нумерацию узлов. Пример используемых сеток показан на рис.1.

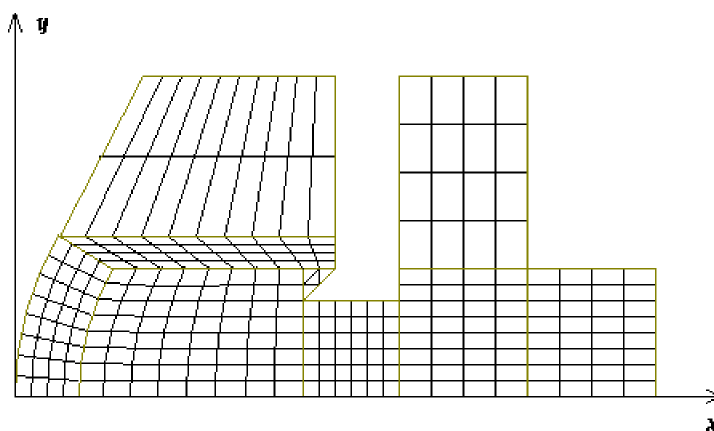


Рис.1. Пример характерной геометрии сетки

В четырехугольной подобласти с прямолинейными сторонами задается разбиение противоположных сторон с постоянным шагом h_i на каждой стороне, и затем получившиеся точки соединяются отрезками. Для построения сетки в треугольной подобласти все три стороны разбиваются на одинаковое число интервалов, а затем проводятся линии, параллельные сторонам подобласти. В полярной подобласти семействами сеточных линий являются отрезки радиальных прямых и дуги концентрических окружностей. Для адаптивного перехода от полярной подобласти к прямоугольной была введена четырехугольная подобласть с одной криволинейной границей в виде дуги. Радиус окружности, содержащей дугу, лежит на продолжении наибольшей из прямолинейных сторон подобласти, примыкающих к дуге (на рис.1. – нижняя сторона). Сетка в такой подобласти задавалась следующим образом. Пусть m и n – числа разбиений двух противолежащих пар сторон подобласти (n – число разбиений по дуге); две стороны, примыкающие к дуге, равномерно разбиваются на m интервалов; затем получившиеся точки попарно соединяются дугами с центрами, лежащими на нижней стороне, в результате чего получаем семейство дуг с постепенно увеличивающимися радиусами. Каждая дуга и правая (на рис.1.) сторона равномерно делится на n частей, и соответствующие точки у соседних кривых соединяются отрезками.

В рассмотренных выше сетках смежные сеточные подобласти предполагаются согласованными, т.е. сеточные узлы на общих внутренних границах подобластей совпадают.

На рассматриваемые подобласти накладываются следующие ограничения: треугольные подобласти должны удовлетворять условию Делоне (окружность, описанная около сеточного треугольника, не содержит других узлов, кроме вершин этого треугольника), а четырехугольные – обобщенному условию Делоне, т.е. такими, чтобы для построения частей ячеек Вороного-Дирихле не требовалось привлечения информации из соседних сеточных элементов. Эти ограничения нужны для описываемого в п.3 поэлементного подхода.

Для работы с такими сетками используется соответствующая сеточная структура данных (ССД). Вся ССД может быть разбита на два уровня – верхний (макроуровень) и нижний (микроуровень). ССД макроуровня описывает расчетные и сеточные подобласти, расчетно-сеточные границы (отрезки) и макроузлы, т.е. вершины, определяющие сеточные подобласти. ССД микроуровня состоит из поузловой и поэлементной информации. Узлы сетки имеют двойную нумерацию: 1) регулярные номера, то есть локальные номера в структурированной сетке, покрывающей i-ую подобласть; 2) уникальные номера, то есть номера в глобальной нумерации всех узлов сетки. Один и тот же узел может иметь несколько регулярных номеров (например, узел, лежащий на границе подобластей), но только один уникальный номер. Такой подход позволяет работать в каждой подобласти со структурированной сеткой, что упрощает реализацию многих вычислительных алгоритмов. Поэлементная информация включает в себя следующие сведения: 1) тип элемента (треугольный, четырехугольный) 2) номер расчетной подобласти, которой принадлежит данный элемент, 3) регулярные номера узлов в вершинах элемента, 4) принадлежность ребер элемента участку границы. При регулярной нумерации узлов сначала нумеруются все узлы 1-ой подобласти, затем все узлы 2-ой подобласти и так далее, пока не будут пронумерованы все узлы сетки. Внутри каждой подобласти нумерация проводится по правилам, принятым для данной структурированной сетки, например, вдоль координатных линий. Формирование уникальной нумерации осуществляется следующим образом: 1) последовательно проводится нумерация всех внутренних узлов всех подобластей, 2) нумеруются граничные узлы 1-ой подобласти, 3) при нумерации граничных узлов 2-ой подобласти делается проверка на совпадение с граничными узлами 1-ой подобласти и, если такое совпадение обнаруживается,

то уникальный номер рассматриваемого узла берется из соответствующего узла 1-ой подобласти, 4) аналогично при нумерации граничных узлов i–ой подобласти просматриваются предыдущие (i–1) подобластей. Тип элемента совпадает с типом подобласти. Для определения принадлежности узла расчетной подобласти применяется алгоритм, состоящий в подсчете числа пересечений луча, исходящего из данного узла с контуром расчетной подобласти (если оно нечетно, то узел принадлежит данной расчетной подобласти). Формирование остальной поэлементной информации осуществляется в результате просмотра всех элементов, которые нумеруются аналогично регулярной нумерации узлов. Более подробное ССД изложена в [5].

3. Алгоритмы вычисления элементов локальных и глобальной матриц баланса

Схема получения сеточных уравнений методом конечных объёмов выглядит следующим образом. Вокруг ***k***-того сеточного узла вводится элементарная ячейка (дадим ей тоже номер ***k***), здесь и в дальнейшем в качестве такой ячейки будем рассматривать ячейку Дирихле-Вороного (множество точек, лежащих к данному узлу ближе, чем к остальным). В случае, когда узел лежит на границе области, в рассмотрении участвует только та часть ячейки, которая лежит внутри области.

Домножив обе части уравнения (1) на x^{α} и проинтегрировав по ячейке, получим балансное соотношение

$$\int_{\gamma_k} \vec{J}\vec{n}\,d\gamma = \int_{b_k} f\,db\,, \qquad (3)$$

где $\vec{n}$ – внешняя единичная нормаль к границе γ_k ячейки b_k, $\vec{J} = x^{\alpha}\sigma\, grad\; u(x,y)$ – вектор плотности потока. Так как граница ячейки представима в виде $\gamma_k = \bigcup_{i=1}^{m}\gamma_k^i$, где γ_k^i – прямолинейный участок стороны ячейки, являющийся серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему узлы с номерами i и k, m – число узлов, участвующих в построении ячейки вокруг k-го узла (для прямоугольной и полярной сеток m = 4, а для равномерной треугольной сетки m = 6), то левую часть (3) можно переписать в виде

$$\int_{\gamma_k} \vec{J}\vec{n}\,d\gamma = \sum_{i=1}^{m}\int_{\gamma_k^i} \vec{J}\vec{n}_i\,d\gamma_i\,. \qquad (4)$$

Приближаем интегралы в (4) квадратурными формулами

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{\gamma_k^i} \vec{J}\vec{n}_i\,d\gamma_i \approx \sum_{i=1}^{m} J_{ki}l_k^i\,, \qquad (5)$$

где l_k^i – длина γ_k^i, $\vec{n}_i$ – внешняя нормаль к γ_k^i, а

$$J_{ki} = \frac{u_i - u_k}{h_k^i}\sigma_{ki}\overset{\alpha}{x}_{ki}l_k^i\,, \qquad (6)$$

где σ_{ki}, $\overset{\alpha}{x}_{ki}$ – значения σ, x^{α} в середине отрезка γ_k^i, h_k^i – длина отрезка, соединяющего узлы с номерами i и k.

В результате получаем уравнение

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_k}{h_k^i}\sigma_{ki}\overset{\alpha}{x}_{ki}l_k^i = f_k s_k\,, \qquad (7)$$

где f_k – значение функции f в k-ом узле, а s_k – площадь ячейки b_k.

Группируя слагаемые в (7), приходим к соотношению

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\overset{\alpha}{x}_{ki}l_k^i}{h_k^i}\sigma_{ki}u_k-\sum_{i=1}^{m}\frac{\overset{\alpha}{x}_{ki}l_k^i}{h_k^i}\sigma_{ki}u_i=f_k s_k\,, \qquad (8)$$

Если записать теперь (8) для каждого сеточного узла, то полученную систему уравнений можно представить в матричном виде $A\vec{v}=\vec{f}$. Коэффициенты матрицы A выглядят следующим образом:

$$a_{ki}=-\frac{\overset{\alpha}{x}_{ki}l_k^i}{h_k^i}\sigma_{ki}\,,\quad a_{kk}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\overset{\alpha}{x}_{ki}l_k^i}{h_k^i}\sigma_{ki}\,. \qquad (9)$$

Полученная таким образом матрица A является стилтьесовой, т.е. симметричной матрицей положительного типа (неразложимая, с диагональным преобладанием по строкам, причём диагональные элементы положительны, а внедиагональные неположительны).

Решение системы с такой матрицей существует и единственно для любой правой части [7]. Итерационное решение полученной системы линейных уравнений реализуется с помощью экономичного явного метода неполной факторизации (в модификации Айзенштадта) с ускорением сопряженными градиентами EXIFA, описанного в [7].

Коэффициенты уравнения (8) будем вычислять не при поячеечном, как это было показано выше, а при поэлементном подходе. Это означает, что подсчитываться будут не полные значения коэффициентов матрицы A, отражающие связь узла с номером k со всеми соседними узлами и посчитанными по отдельному объему, а их слагаемые – вклады в коэффициенты, полученные по формуле (9) при аппроксимации баланса по частями конечных объёмов, содержащихся в отдельно взятом сеточном элементе. Для наглядности поясним такой подход на примере прямоугольного сеточного элемента, с локальными номерами вершинам 1,2,3,4 (вершины нумеруются против часовой стрелки, начиная с левого нижнего).

Введём в таком элементе для каждого узла локальные векторы решения, потока и правой части

$$u^{loc}=\{u_k\},\ J^{loc}=\{J_k\},\ f^{loc}=\{f_k\},\ k=\{1,2,3,4\}. \qquad (10)$$

Здесь нижний индекс обозначает локальный номер узла, J_k есть поток через часть поверхности k-той ячейки, содержащейся в данном сеточном элементе. Каждая компонента J^{loc} есть линейная форма неизвестных значений u_k, и выражается по формуле (8). Например, компонента J_1 представима в следующем виде (для простоты положим $\alpha=0$, $\sigma=1$) :

$$J_1=\left(\frac{h_1}{2h_2}+\frac{h_2}{2h_1}\right)u_2-\frac{h_1}{2h_2}u_1-\frac{h_2}{2h_1}u_4\,,$$

где h_1 и h_2 – соответственно длины вертикальной и горизонтальной сторон элемента. Тогда поток в сеточном элементе можно записать в матрично-векторной форме $J^{loc}=A^{loc}u^{loc}$, где $A^{loc}=\{k_{ij}\}$ есть квадратная матрица четвёртого порядка с элементами, определяемыми из (8) по вышеописанному подходу. В силу того, что выражение (10) получено после аппроксимации балансного соотношения в одном сеточном элементе, т.е. “локально”, матрицу A^{loc} называют локальной матрицей баланса. По аналогии с локальной матрицей баланса, матрицу линейной алгебраической системы уравнений, полученную ранее, называют глобальной матрицей баланса.

4. Результаты численных экспериментов

Приведем примеры решения некоторых задач, показывающих точность расчетов при помощи алгоритмов, описанных в п.2,3. Точность проведения итерационных процессов в обеих задачах бралась $\varepsilon = 10^{-8}$.

Задача 1: расчет электрического поля в области, представляющей собой фрагмент конденсатора (рис.2.). Сам конденсатор представляет собой область, ограниченную двумя окружностями R_1=0.1 и R_2=1. На окружностях задаются условия u(R_1)=1, u(R_2)=0. Исследуемая часть подобласти окружностью радиуса R_*=0.7 делится на подобласти, с различными диэлектрическими постоянными λ_1 и λ_2.

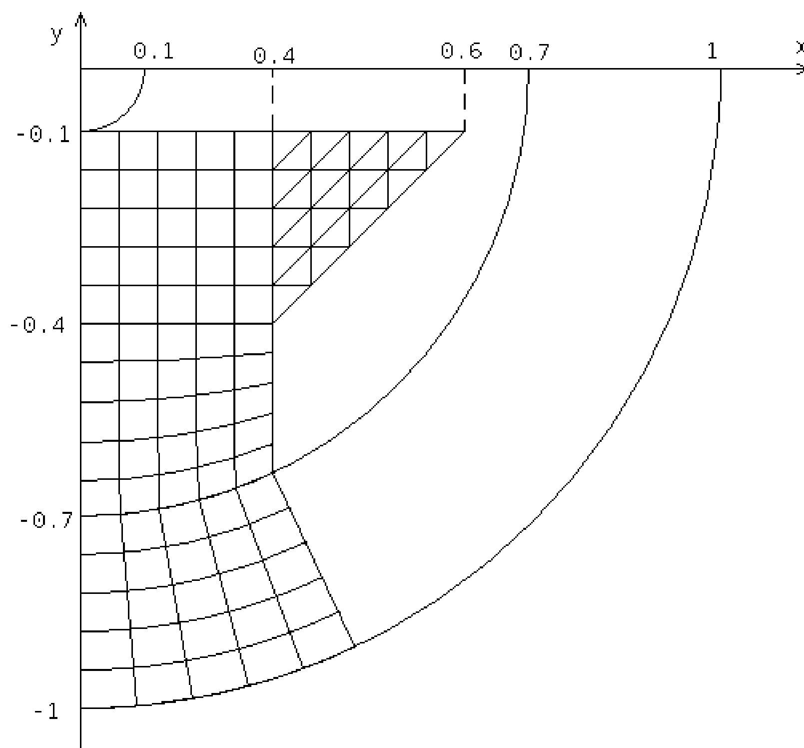


Рис.2. Фрагмент сферического конденсатора

Аналитическое решение задачи дается следующими формулами:

для α=0 $$u(R)=\begin{cases} c_1*\ln(R)+c_2, & R_1 \le R \le R_* \\ c_3*\ln(R), & R_* \le R \le R_2 \end{cases},$$

где $c_1 = \left(\ln(R_*)*(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1) - \ln(10) \right)^{-1}$, $c_2 = 1 + \ln(10)*c_1$, $c_3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}*c_1$

для α=1 $$u(R)=\begin{cases} \frac{c_1}{R}+c_2, & R_1 \le R \le R_* \\ \frac{c_3}{R}+c_3, & R_* \le R \le R_2 \end{cases},$$

где $c_1 = \left(10 - \frac{1}{R_*} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\frac{1}{R_*}-1) \right)^{-1}$, $c_2 = 1 - 10*c_1$, $c_3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}*c_1$.

В табл. 1. приведено значение относительной погрешности $\delta = \left| \frac{u(x_i, y_j) - u_{ij}}{u_{ij}} \right|$ в узле x = 0, y = –0.19, где погрешность близка к максимальной. Ω_0^h – исходная сетка (10×10 в каждой подобласти), Ω_1^h и Ω_2^h – соответственно сгущенная по каждому направлению в 2 и 4 раза сетка Ω_0^h.

	Ω_0^h		Ω_1^h		Ω_2^h	
	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 8$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 8$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 8$
α=0	1.2*10^{-3}	1.5*10^{-3}	3.0*10^{-4}	3.7*10^{-4}	7.5*10^{-5}	9.2*10^{-5}
α=1	8.1*10^{-3}	8.8*10^{-3}	2.1*10^{-3}	2.3*10^{-3}	5.2*10^{-4}	5.7*10^{-4}

Табл.1. Результаты расчетов конденсатора

По результатам численного эксперимента можно говорить о том, что данный метод имеет точность порядка h^2 как для случаев α=0,1, так и для случаев, когда рассматриваются области с различными физическими свойствами. Отметим, что точность данных расчетов примерно в пять раз выше, чем при использовании конечно-разностных аппроксимаций на структурированных прямоугольных сетках с таким же числом узлов, описанных в [8].

Задача 2: расчет характерной конфигурации электронной пушки (рис.1).

Расчеты проводились на последовательности сгущающихся сеток, Ω_0 – исходная сетка, Ω_k – сгущенная по каждому направлению в 2^k раз сетка Ω_0. Решение приводится в одних и тех же узлах исходной расчетной области, расположенных на оси (y=0). Первая строка в таблице – x координаты узлов.

	2.5	7.5	18.75	36.25	50	57.5	65	75	85	95
Ω_0	0.8335	2.6152	7.1016	15.5129	24.6623	32.9184	45.8059	66.6269	83.9707	95.4340
Ω_1	0.8333	2.6142	7.0939	15.4979	24.7847	33.1968	45.9499	66.3836	83.6622	95.3343
Ω_2	0.8331	2.6135	7.0893	15.4880	24.8255	33.2868	46.0006	66.3049	83.5588	95.2987
Ω_3	0.8330	2.6130	7.0867	15.4824	24.8389	33.3178	46.0191	66.2776	83.5221	95.2856
Ω_4	0.8329	2.6128	7.0854	15.4794	24.8433	33.3289	46.0259	66.2677	83.5085	95.2807
Ω_5	0.8329	2.6126	7.0847	15.4779	24.8447	33.3329	46.0284	66.2640	83.5034	95.2788

Табл.2. Результаты расчетов для α=0

	2.5	7.5	18.75	36.25	50	57.5	65	75	85	95
Ω_0	0.7603	2.4714	6.8890	14.6259	22.1112	29.5957	44.2882	69.5351	88.2383	97.2150
Ω_1	0.7582	2.4645	6.8595	14.5394	22.1741	29.9497	44.4528	69.1420	87.8175	97.1141
Ω_2	0.7579	2.4631	6.8491	14.5021	22.1945	30.0621	44.5116	69.0097	87.6725	97.0751
Ω_3	0.7579	2.4630	6.8451	14.4861	22.2007	30.1008	44.5336	68.9629	87.6204	97.0601
Ω_4	0.7580	2.4630	6.8436	14.4792	22.2024	30.1147	44.5419	68.9458	87.6009	97.0544
Ω_5	0.7580	2.4630	6.8429	14.4761	22.2028	30.1198	44.5451	68.9395	87.5935	97.0518

Табл.3. Результаты расчетов для $\alpha=1$

Из табл.3 видно, что при расчетах на сетке Ω_5 можно говорить о получении “точного решения, имеющего погрешность около 0.01%”.

В табл.4. приведены количества итераций, затраченные на получение решения для случаев $\alpha=0$ и $\alpha=1$ (соответственно в первом и во втором столбцах для каждой сетки), N – общее число узлов в области.

Сетки	Ω_0		Ω_1		Ω_2		Ω_3		Ω_4		Ω_5	
N	318		1183		4557		17881		70833		281953	
$\varepsilon=10^{-6}$	44	50	73	78	120	138	202	230	318	402	515	1007
$\varepsilon=10^{-8}$	68	75	118	124	185	212	324	367	556	668	650	1219

Табл.4. Количество итераций для задачи 2

Как следует из этих результатов, количества итераций для неструктурированных сеток в два или более раза больше, в сравнении с описанными в [7] модельными задачами со структурированными сетками.

Литература

[1] V.D. Liseikin. Grid generation methods. Berlin: Springer-Verb., 1999
[2] O.Axelsson, V. Barkep. Finite element solution of boundary value methods: Theory and computations. New York: Acad. Press, 1984
[3] С.Писсанецкий. Технология разреженных матриц, М: Мир, 1988
[4] В.П.Ильин. методы конечных разностей и конечных объемов для решения эллиптических уравнений. Новосибирск, изд. ИМ СОРАН, 2000 г
[5] В.П.Ильин, В.М.Свешников, В.С. Сынах. СибЖИМ, т.3, N1, 2000, 124-136
[6] В.П.Ильин. Вычислительно-информационные технологии математического моделирования. Автометрия, N1, 2000. 3-16
[7] В.П.Ильин. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М., Наука, 1995
[8] В.П.Ильин. Численные методы решения задач электрофизики. М., Наука, 1985